

# CONVECTION ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX EN REGIME LAMINAIRE PERMANENT

A. MOJTABI et J.-P. CALTAGIRONE

Laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S., 4ter route des Gardes, F 92190 Meudon, France

(reçu le 2 mai 1977)

**Résumé**—La résolution de l'équation de l'énergie a été effectuée dans le cas d'un écoulement laminaire entre deux cylindres coaxiaux isothermes maintenant un gradient constant dans la couche annulaire. L'évolution du champ de température le long des tubes a été obtenue à l'aide de la méthode de Galerkin ainsi qu'avec un modèle numérique aux différences finies pour plusieurs rapports de rayons. Le transfert de chaleur entre les deux tubes, caractérisé par les nombres de Nusselt extérieur et intérieur, ainsi que la température de mélange ont été déterminés en fonction de la longueur réduite des deux tubes. La comparaison des solutions obtenues par différences finies et par la méthode de Galerkin, pour plusieurs fonctions d'essais, fait apparaître une bonne concordance.

## NOMENCLATURE

$a$ ,	diffusivité du fluide;	$z$ ,	composante axiale adimensionnelle du
$a(z)$ ,	fonction intervenant dans le développement de la température;		cylindre, $z = \frac{z'}{r_i}$ ;
$Nu_e$ ,	nombre de Nusselt local extérieur,	$z'$ ,	composante axial du cylindre.
	$Nu_e = -R \log R \frac{\partial T}{\partial r} \Big _{r=R}$ ;		
$Nu_i$ ,	nombre de Nusselt local intérieur,		
	$Nu_i = -\log R \frac{\partial T}{\partial r} \Big _{r=r_i}$ ;		
$Pe$ ,	nombre de Péclet, $Pe = \frac{W_0 r_i}{a} = Re Pr$ ;		
$Pr$ ,	nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\nu}{a}$ ;		
$r$ ,	composante radiale adimensionnelle,		
	$r = \frac{r'}{r_i}$ ;		
$r_e$ ,	rayon du cylindre extérieur;		
$r_i$ ,	rayon du cylindre intérieur;		
$r'$ ,	composante radiale;		
$R$ ,	grandeur caractéristique de la configuration annulaire, $R = \frac{r_e}{r_i}$ ;		
$Re$ ,	nombre de Reynolds, $Re = \frac{W_0 r_i}{\nu}$ ;		
$T$ ,	température adimensionnelle en chaque point du fluide, $T = \frac{T - T_e}{T_i - T_e}$ ;		
$T_e$ ,	température du cylindre extérieur;		
$T_i$ ,	température du cylindre intérieur;		
$T_N$ ,	développement à l'ordre $N$ de la température, $T_N = \varphi(r) - \sum_{i=1}^{i=N} a_i(z) \Psi_i(r)$ ;		
$T'$ ,	température en chaque point du fluide;		
$W$ ,	vitesse adimensionnelle en chaque point du fluide, $W = \frac{W'}{W_0}$ ;		
$W_0$ ,	vitesse débitante du fluide à travers toute section droite;		
$W'$ ,	vitesse en chaque point du fluide;		

## Symboles grecs

$\nu$ ,	viscosité cinématique du fluide;
$\varphi(r)$ ,	expression adimensionnelle de la température pour $z$ infini;
$\Psi_i(r)$ ,	fonction d'essai.

## 1. INTRODUCTION

LE PROBLÈME de la convection thermique dans un tube, en régime laminaire, a été abordé par de nombreux auteurs depuis les travaux de Graetz et de Nusselt. Nous citerons les travaux effectués par Abramowitz [1], Singh [2] et de Jones [3] qui, sans négliger la conduction axiale a obtenu la solution de ce problème où les valeurs propres sont données sous forme d'un développement asymptotique. La géométrie étudiée ici implique l'introduction d'un paramètre supplémentaire: le rapport des rayons intérieur et extérieur; la distribution de vitesse dans la couche annulaire déterminée par résolution de l'équation de quantité de mouvement est supposée connue et introduite dans l'équation de l'énergie et celle-ci est ensuite résolue par la méthode de Galerkin développée dans les ouvrages de Kantorovich et Krylov [4], Finlayson [5] et Lions [6]. Les résultats donnés pour diverses fonctions d'essais et plusieurs degrés d'approximation sont analysés. Ce problème d'évolution a aussi été abordé par la méthode des différences finies et les résultats obtenus comparés avec ceux de la méthode précédente. Les avantages et inconvénients des deux méthodes sont aussi commentés.

La température de mélange dans la couche et les nombres de Nusselt locaux extérieur et intérieur sont déduits des calculs pour plusieurs valeurs du rapport des rayons.

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

Il s'agit de l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible entre deux cylindres infinis de rayons intérieur  $r_i$  et de rayon extérieur  $r_e$ . Les cylindres intérieur et extérieur, supposés imperméables et isothermes, sont maintenus respectivement à la température  $T_i$  et  $T_e$  avec  $T_i > T_e$ .

L'équation de l'énergie, pour un écoulement de Poiseuille annulaire, dans le cas où on néglige la conduction longitudinale, s'écrit:

$$a \left[ \frac{\partial^2 T'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial T'}{\partial r'} \right] - W(r') \frac{\partial T'}{\partial z'} = 0$$

où

$$W(r') = \frac{2W_0[r_e^2 - r'^2 + (r_e^2 - r_i^2) \operatorname{Log}(r'/r_e)/\operatorname{Log}(r_e/r_i)]}{r_e^2 + r_i^2 - (r_e^2 - r_i^2)/\operatorname{Log}(r_e/r_i)}$$

$a$  représente la diffusivité thermique du fluide,  $W_0$  la vitesse débitante du fluide à travers une section droite du conduit annulaire,  $r'$  la coordonnée radiale et  $z'$  la coordonnée axiale du cylindre. Il n'y a pas de coordonnée angulaire, le problème étant supposé axisymétrique.

Les conditions aux limites pour ce problème se présentent sous la forme:

$$\begin{aligned} T'(r_i, z') &= T_i \quad \forall z' \in ]0, \infty[, \\ T'(r_e, z') &= T_e \quad \forall z' \in [0, \infty[, \\ T'(r', 0) &= T_e \quad \forall r' \in ]r_i, r_e[; \end{aligned}$$

le régime dynamique est supposé établi en  $z' = 0$ .

L'équation de l'énergie est rendue adimensionnelle par les grandeurs de référence suivantes:

$$\begin{aligned} W(r) &= \frac{W'}{W_0}; \quad z = \frac{z'}{r_i}; \quad r = \frac{r'}{r_i}; \\ R &= \frac{r_e}{r_i} \quad \text{et} \quad T = \frac{T' - T_e}{T_i - T_e} \end{aligned}$$

(où les grandeurs réelles sont désignées par un prime).

Ainsi l'équation de l'énergie rendue adimensionnelle s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - Pe W(r) \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

où

$$W(r) = \frac{-2(r^2 - 1 - (R^2 - 1) \operatorname{Log} r/\operatorname{Log} R)}{R^2 + 1 - (R^2 - 1)/\operatorname{Log} R}$$

et où  $Pe = W_0 r_i/a$  est le nombre de Péclet; avec comme conditions aux limites:

$$T(1, z) = 1 \quad \forall z \in ]0, \infty[, \quad (2)$$

$$T(R, z) = 0 \quad \forall z \in [0, \infty[, \quad (3)$$

$$T(r, 0) = 0 \quad \forall r \in ]1, R]. \quad (4)$$

## 3. METHODE DE GALERKIN

### (a) Unicité

Montrons que, pour le problème ainsi posé, il existe au plus une seule solution. En effet, soient  $T_1$  et  $T_2$  deux solutions différentes de ce problème, vérifiant l'équation (1) et les trois conditions aux limites (2)–(4); la différence  $U = T_1 - T_2$  vérifie dans ces conditions

l'équation (1) et les trois conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} U(1, z) &= 0 \quad \forall z \in ]0, \infty[, \\ U(R, z) &= 0 \quad \forall z \in [0, \infty[, \\ U(r, 0) &= 0 \quad \forall r \in ]1, R]. \end{aligned}$$

Multiplions par  $rU$  l'équation (1) où  $T$  a été remplacé par  $U$  et intégrons entre 1 et  $R$ , nous obtenons:

$$\int_1^R U \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) dr = \frac{Pe}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_1^R r W(r) U^2 dr \right],$$

ce qui donne:

$$\frac{Pe}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_1^R r W(r) U^2 dr \right] = - \int_1^R r \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 dr.$$

Le second membre de cette équation étant négatif quel que soit  $z$ , la fonction de  $z$ ,  $\int_1^R r W(r) U^2 dr$ , est décroissante, mais comme elle est nulle pour  $z = 0$ , puisque  $U(r, 0) = 0 \quad \forall r \in ]1, R]$ , on a  $\int_1^R r W(r) U^2 dr = 0$ . Cependant  $rW(r) > 0$  implique  $U(r, z) = 0$ , soit  $T_1 = T_2$ .

### (b) Détermination d'une solution approchée

Pour  $z$  tendant vers l'infini, la température n'est plus fonction de  $z$  et l'équation (1) admet pour solution la fonction

$$\varphi(r) = 1 - \frac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} R},$$

vérifiant les conditions aux limites.

On pose:

$$T_N(r, z) = \varphi(r) - \sum_{i=1}^N a_i(z) \Psi_i(r) \quad (5)$$

et on exige que  $T_N(r, z)$  satisfasse au système (1)–(4). Si nous prenons les fonctions d'essais vérifiant:

$$\Psi_i(1) = 0 \quad \forall i \in [1, N] \quad (6)$$

$$\Psi_i(R) = 0 \quad \forall i \in [1, N], \quad (7)$$

les deux conditions aux limites (2) et (3) se trouvent ainsi vérifiées.

La méthode de Galerkin consiste à se donner d'abord les fonctions d'essais vérifiant les conditions (6) et (7) et le problème de départ se réduit à la détermination des fonctions  $a_i(z)$  vérifiant:

$$\sum_{i=1}^N \left[ a_i(z) \left( \Psi_i'' + \frac{1}{r} \Psi_i' \right) - Pe W(r) \Psi_i a_i'(z) \right] = 0 \quad (8)$$

$$\varphi(r) = \sum_{i=1}^N a_i(0) \Psi_i(r) \quad \forall r \in ]1, R] \quad (9)$$

avec:

$$\varphi(r) = 1 - \frac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} R}.$$

On obtient le système différentiel qui détermine les  $a_i(z)$  en multipliant les deux équations (8) et (9) par les  $\Psi_j(r), j$  variant de 1 à  $N$ . En intégrant le résultat obtenu

entre 1 et  $R$ , on trouve

$$\sum_{i=1}^N a_i(z) \int_1^R \left( \Psi_i'' + \frac{1}{r} \Psi_i' \right) \Psi_j dr - Pe a_i'(z) \int_1^R \Psi_i \Psi_j dr = 0 \quad (10)$$

$$\int_1^R \varphi(r) \Psi_j(r) dr = \sum_{i=1}^N a_i(0) \int_1^R \Psi_i \Psi_j dr. \quad (11)$$

Ce système nous conduit à deux équations matricielles:

$$[C][a_i(z)] = Pe[D][a_i'(z)] \quad (12)$$

$$[H][a_i(0)] = [G] \quad (13)$$

où la matrice carrée  $[C]$  a pour éléments:

$$c_{ji} = \int_1^R \left( \Psi_i'' + \frac{1}{r} \Psi_i' \right) \Psi_j dr$$

et la matrice carrée  $[D]$ :

$$d_{ji} = \int_1^R W(r) \Psi_i \Psi_j dr.$$

Dans l'équation matricielle (13) exprimant la condition initiale, la matrice carrée  $[H]$  a pour éléments

$$h_{ji} = \int_1^R \Psi_i \Psi_j dr$$

et la matrice colonne  $[G]$ ,

$$g_j = \int_1^R \varphi \Psi_j dr.$$

Le système (12) avec les conditions initiales (13) nous conduit ainsi aux deux équations matricielles suivantes:

$$Pe[a_i'(z)] = [D^{-1}][C][a_i(z)] = [A][a_i(z)] \quad (14)$$

$$[a_i(0)] = [H^{-1}][G]. \quad (15)$$

Ces deux équations représentent un système différentiel linéaire d'ordre  $N$  avec conditions initiales. Pour résoudre un tel système nous supposerons que le choix des fonctions d'essais est tel que la matrice  $[A] = [D^{-1}][C]$  soit une matrice diagonalisable et nous transformerons ainsi ce système dans le repère propre.

Soit  $[Z]$  la matrice ayant pour vecteurs colonnes les vecteurs propres de  $[A]$ . Dans ce cas, nous obtenons:

$$[a_i(z)] = [Z][a_i^p(z)]$$

où l'exposant  $p$  se rapporte aux vecteurs écrits dans le repère propre. Le système d'équations (14) et (15) nous conduit, moyennant quelques transformations simples, au système:

$$[a_i(z)] = [Z][a_i^p(0) \exp((\omega_i z)/Pe)] \quad (16)$$

$$[a_i^p(0)] = [Z^{-1}][H^{-1}][G] \quad (17)$$

où les  $\omega_i$  sont les valeurs propres respectives associées aux valeurs propres. On obtient ainsi:

$$[a_i(z)] = [z][\text{diag} \exp(\omega_i z/Pe)][Z^{-1}][H^{-1}][G] \quad (18)$$

où  $[\text{diag} \exp(\omega_i z/Pe)]$  représente la matrice diagonale et  $\exp \omega_i z/Pe$  représente le terme de rang  $i$ .

De la connaissance des  $a_i(z)$  on déduit l'expression de la température en chacun des points de l'écoulement.

(c) *Détermination de la température de mélange et des nombres de Nusselt*

La température de mélange est définie par:

$$T_m(z) = \int \int_s T W ds / \int \int_s W ds$$

où

$$\int \int_s W ds = \pi(R^2 - 1)$$

désigne le débit volumique du fluide. Lorsqu'on remplace dans cette définition  $T$  par sa valeur approchée  $T_N$ , on obtient:

$$T_m(z) = \left( \frac{2}{R^2 - 1} \right) \left[ \int_1^R \varphi W r dr - \sum_{i=1}^N d_i(z) \int_1^R \Psi_i W r dr \right]$$

où

$$\int_1^R \varphi W r dr = 2K \left[ \frac{1}{4} + (R^2 - 1) \left( \frac{-3R^2 - 7}{4} + \frac{(R^2 - 1)}{\log R} \right) \right] / (R^2 - 1)$$

avec:

$$K = - \frac{2}{R^2 + 1 - \frac{R^2 - 1}{\log R}}.$$

Il reste seulement à déterminer les intégrales  $\int_1^R \Psi_i W r dr$  puisque les  $a_i(z)$  ont déjà été précédemment calculés.

Le transfert de chaleur local sur les surfaces intérieure et extérieure est caractérisé par les expressions des nombres de Nusselt:

$$Nu_i(z) = - \log R \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

et

$$Nu_e(z) = - R \log R \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

Lorsqu'on remplace  $T$  par  $T_N$  donné par l'expression (5), on obtient:

$$Nu_i(z) = \left( -\varphi'(1) + \sum_{i=1}^N a_i(z) \Psi_i'(1) \right) \log R$$

et

$$Nu_e(z) = \left( -\varphi'(R) + \sum_{i=1}^N a_i(z) \Psi_i'(R) \right) R \log R.$$

Ainsi l'expression des nombres de Nusselt s'en déduit directement et sans nouveau calcul une fois le champ de température connu ; cette méthode présente donc un grand avantage dans notre cas sur la méthode des différences finies.

(d) *Détermination analytique du champ de température, de la température de mélange et des nombres de Nusselt dans le cas N = 1*

Un autre intérêt de la méthode est de permettre l'obtention de la solution approchée dans le cas  $N = 1$  par simple intégration et sans avoir recours à un calcul machine, ce calcul pour  $N = 1$  pouvant donner, pour un choix convenable des fonctions d'essai  $\Psi_i$ , une bonne approximation de la solution. Nous avons d'abord utilisé les fonctions d'essais suivantes vérifiant les conditions aux limites:

$$\Psi_i = [\text{Log } r(\text{Log } R - \text{Log } r)]^i$$

Pour  $N = 1$ , nous avons obtenu:

$$a_1(z) = \frac{J_1}{J_2} \exp \left[ \frac{I_1 z}{I_2 Pe} \right]$$

avec:

$$J_1 = \text{Log } R + 2R + 4 - \frac{6(R-1)}{\text{Log } R}$$

$$J_2 = 2R \text{Log}^2 R - 2 \text{Log } R - 12R \text{Log } R - 12 \text{Log } R + 24R - 24$$

$$I_1 = 2 \left( 2 - \frac{2}{R} - \text{Log } R - \frac{\text{Log } R}{R} \right)$$

$$I_2 = K \left[ -\frac{52}{57} R^3 \text{Log}^2 R + \frac{482}{27} R^3 \text{Log } R - 6R \text{Log } R + \frac{52}{27} \text{Log}^2 R - 6R^2 \text{Log } R + \frac{482}{27} \text{Log } R - \frac{5824}{81} R^3 - 48R^2 + 48R + \frac{5824}{81} + 120(R^2 - 1)(R - 1)/\text{Log } R \right]$$

avec:

$$k = -\frac{2}{R^2 + 1 - \frac{R^2 - 1}{\text{Log } R}}$$

d'où:

$$T_1 = 1 - \frac{\text{Log } r}{\text{Log } R} - [\text{Log } r(\text{Log } R - \text{Log } r)] a_1(z).$$

Par rapport à la méthode des différences finies l'écart sur la valeur de  $T$  ainsi déterminée est de  $3 \times 10^{-2}$  pour  $z/Pe = 0,1$  et de  $10^{-3}$  pour  $z/Pe = 0,4$ . Nous avons de même pour la température de mélange:

$$T_m = \left[ \int_1^R \varphi(r) W(r) r \, dr - a_1(z) \int_1^R \Psi_1 W(r) r \, dr \right] / \pi(R^2 - 1)$$

où  $\int_1^R \varphi(r) W(r) r \, dr$  a déjà été calculé précédemment. Les nombres de Nusselt intérieur et extérieur sont dans ce cas:

$$Nu_i = 1 - (\text{Log } R)(R - 1)a_1(z)$$

$$Nu_e = 1 + R(\text{Log } R)(R - 1)a_1(z).$$

(e) *Détermination numérique approchée, par la méthode de Galerkin, du champ de température, de la température de mélange et des nombres de Nusselt*

Pour les fonctions d'essais citées précédemment, nous avons constaté que la solution ne converge pas quand on augmente  $N$  et que l'approximation obtenue

pour  $N > 1$  est peu différente du cas  $N = 1$ , ce résultat nous a conduit par la suite à approcher la solution au moyen de nouvelles fonctions d'essais.

Nous avons utilisé deux catégories de fonctions vérifiant les conditions aux limites qui sont, d'une part,

$$\Psi_i = \sin \left( \frac{r-1}{R-1} i\pi \right),$$

d'où,

$$\int_1^R \Psi_i \Psi_j \, dr = \frac{1}{2}(R-1)\delta_{ij}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{pour } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

et, d'autre part,

$$\Psi_i = [(r-1)(r-R)]^i$$

d'où

$$\int_1^R \Psi_i \Psi_j \, dr = (-1)^{i+j} \frac{((i+j)!)^2}{(2(i+j)+1)!} (R-1)^{2(i+j)+1}.$$

Pour ces deux fonctions d'essais la solution obtenue converge quand  $N$  augmente. Pour les fonctions sinus, on constate qu'à partir de  $N = 6$ , les solutions obtenues sont identiques à  $10^{-5}$  près pour toute valeur de  $z$ , à l'exception d'une valeur très voisine de  $z = 0$ , où il a été nécessaire de dépasser  $N = 10$  pour avoir une solution invariante partout. Pour les fonctions polynômes, la convergence est obtenue à partir de  $N = 2$  et ce pour toute valeur de  $z$  à l'exception de  $z = 0$ .

#### 4. METHODE DES DIFFERENCES FINIES

L'équation (1) est transformée en équation aux différences: l'algorithme est celui de la méthode de Crank-Nicolson. De plus,  $r$  varie de 1 à  $R$  et  $z/Pe$ , de 0 à  $R(R-1)/2$  et les valeurs des rapports de rayons explorés sont  $\sqrt{2}, 2, 4$  et 16.

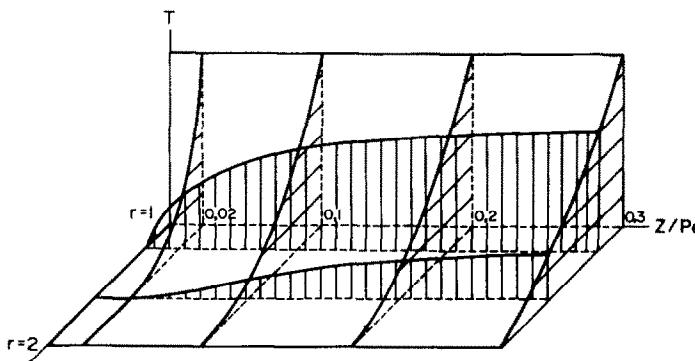
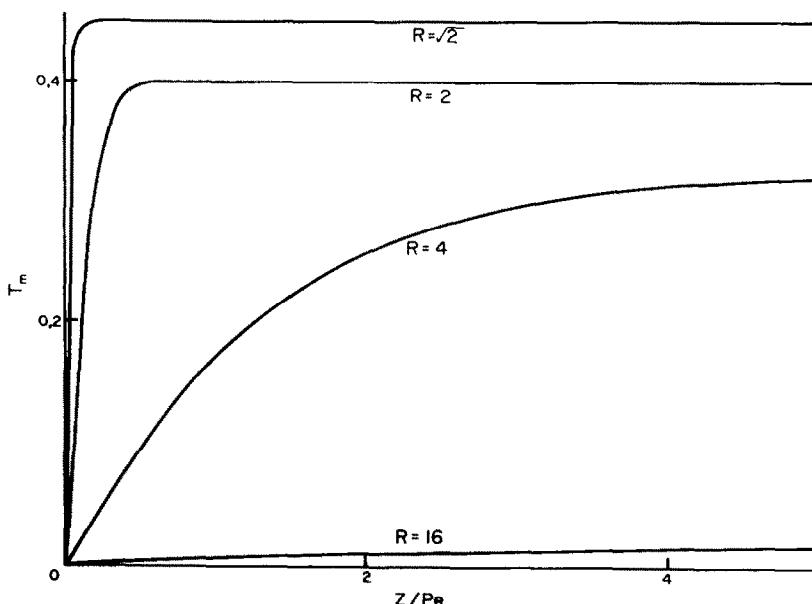
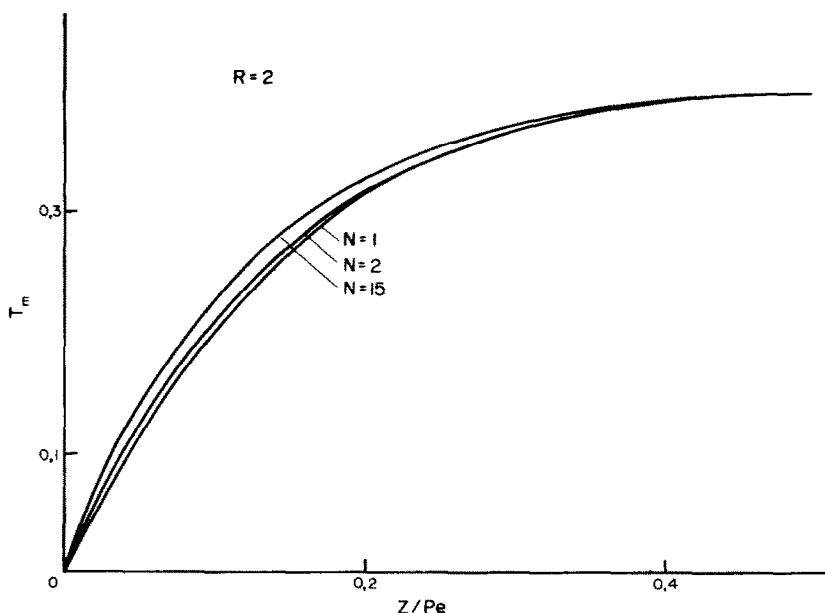
Le maillage comprend 101 noeuds.

L'espace mémoire est de 300 K, le temps de calcul de 0,2 s par pas de temps et le nombre de pas de temps de l'ordre de 200.

#### 5. INTERPRETATION PHYSIQUE DES RESULTATS

Nous avons ainsi déterminé la répartition de températures, les nombres de Nusselt et la température moyenne pour les rapports de rayons suivants:  $\sqrt{2}, 2, 4$  et 16. Ces différents calculs ont été effectués par la méthode de Galerkin et celle des différences finies. Les résultats ainsi obtenus sont représentés sur les graphiques suivants où nous avons comparé les différentes approximations correspondant à  $N = 1, 2$  et  $N = 15$  aux résultats obtenus à partir de la méthode des différences finies et ce, pour les deux dernières fonctions d'essais.

Il ressort de cette comparaison que la solution obtenue par la méthode de Galerkin coïncide parfaitement avec celle déterminée par les différences finies et ce, à partir de  $N \geq 2$  pour les fonctions polynômes et de  $N \geq 6$  pour les fonctions sinus. On voit sur les

FIG. 1. Champ de température pour  $R = 2$ .FIG. 2. Température de mélange en fonction de la longueur réduite pour différentes valeurs de  $R$ .FIG. 3. Température de mélange en fonction de la longueur réduite pour  $R = 2$  et pour différentes valeurs de  $N$  avec des fonctions d'essais sous forme de sinus. La courbe correspondant à  $N = 15$  coïncide avec celle obtenue par les différences finies.

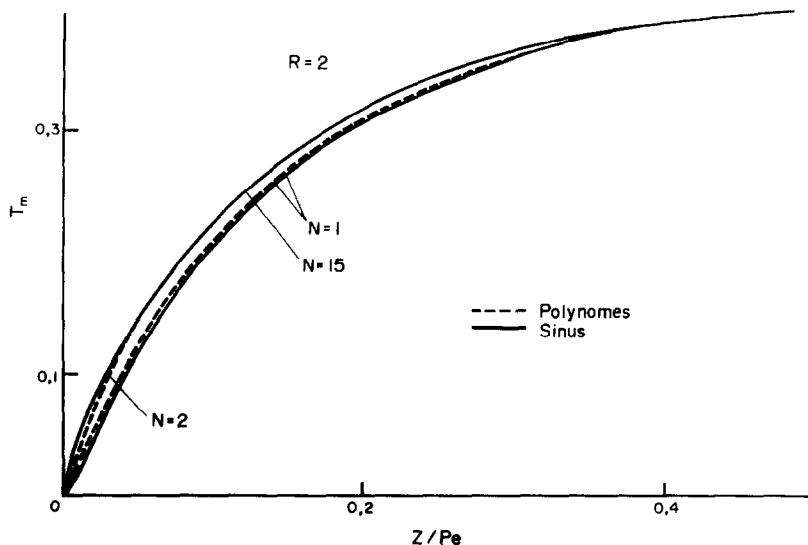


FIG. 4. Comparaison de la température de mélange en fonction de la longueur réduite dans le cas où les fonctions d'essais sont des sinus ou des polynômes.

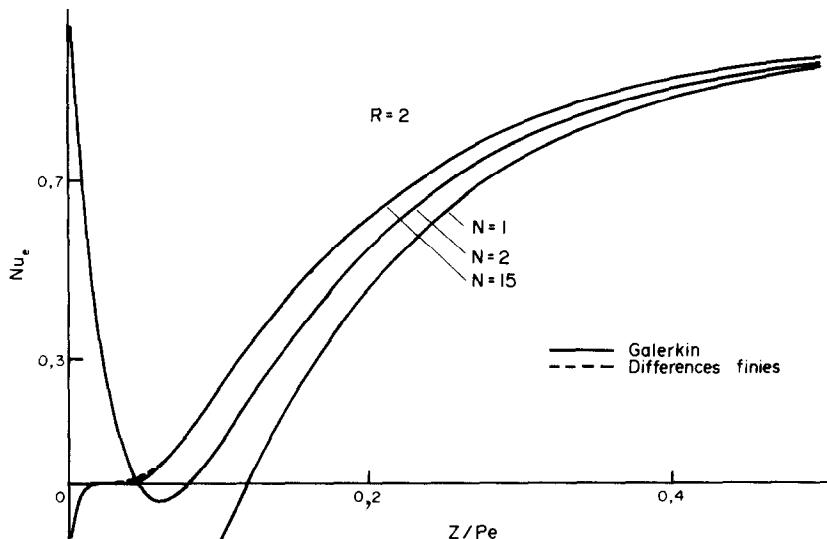


FIG. 5. Nombre de Nusselt extérieur en fonction de la longueur réduite pour  $R = 2$  et pour différentes valeurs de  $N$  avec des fonctions d'essais sous forme de sinus. La courbe correspondant à  $N = 15$  coïncide avec celle obtenue par les différences finies sauf au voisinage de zéro.

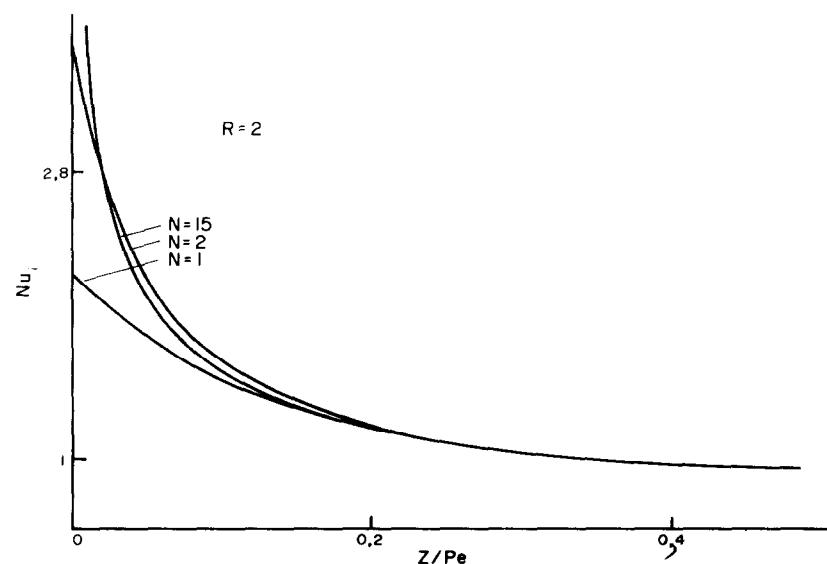


FIG. 6. Nombre de Nusselt intérieur en fonction de la longueur réduite pour  $R = 2$  et pour différentes valeurs de  $N$  avec des fonctions d'essais sous forme de sinus. La courbe correspondant à  $N = 15$  coïncide avec celle obtenue par les différences finies.

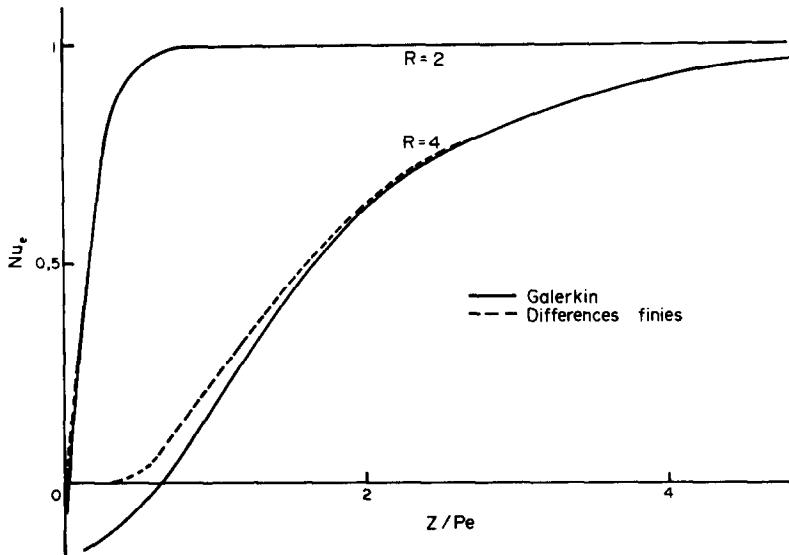


FIG. 7. Nombre de Nusselt extérieur en fonction de la longueur réduite pour  $R = 2$  et  $R = 4$ . Les deux méthodes de calcul donnent le même résultat sauf pour les faibles valeurs de  $z/Pe$  et pour  $R = 4$ .

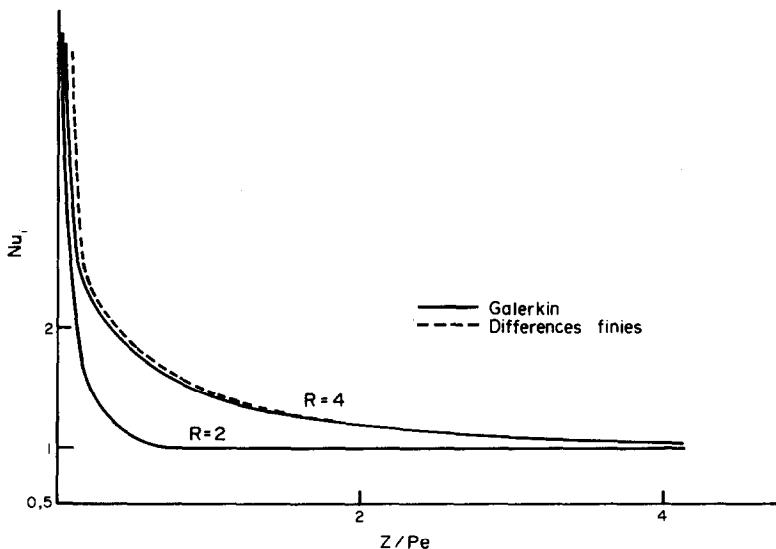


FIG. 8. Nombre de Nusselt intérieur en fonction de la longueur réduite pour  $R = 2$  et  $R = 4$ . Les deux méthodes de calcul donnent le même résultat sauf pour les faibles valeurs de  $z/Pe$  et dans le cas  $R = 4$ .

courbes que la température de mélange, les nombres de Nusselt et la longueur d'établissement du régime thermique décroissent quand le rapport des rayons  $R$  croît.

#### 6. CONCLUSION

Nous avons d'abord dans un premier temps démontré l'unicité de la solution de l'équation de l'énergie dans le cas de l'écoulement annulaire laminaire. La méthode de Galerkin nous a permis d'obtenir la solution développée sous forme de fonctions d'essais et cela pour plusieurs valeurs du rapport des rayons des deux tubes.

De la connaissance du champ de température entre les deux tubes, nous avons déduit les expressions de la température de mélange et des nombres de Nusselt extérieur et intérieur en fonction de la longueur réduite des tubes.

La comparaison des résultats ainsi obtenus à ceux que nous avons déterminés avec un modèle numérique aux différences finies fait apparaître une bonne concordance.

*Remerciements*—Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Aérotomique du C.N.R.S., sous la direction de Monsieur le Professeur J. J. Bernard. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

## REFERENCES

1. M. Abramowitz, On solution of differential equation occurring in the problem of heat convection in laminar flow through a tube, *J. Math. Phys.* **32**, 184–187 (1953).
2. S. N. Singh, Heat transfer by laminar flow in cylindrical tube, *Appl. Scient. Res.* **A7**, 325–340 (1958).
3. A. S. Jones, Extensions to the solution of the Graetz problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 619–623 (1971).
4. L. V. Kantorovich et V. I. Krylov, *Approximate Methods in Higher Analysis*. Noordhoff Gröningen (1958).
5. B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, New York (1972).
6. J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod Gauthier Vil-lars, Paris (1969).

## CONVECTION BETWEEN TWO COAXIAL CYLINDERS IN A LAMINAR PERMANENT REGIME

**Abstract** — The equation of energy was solved in the cause of a laminar flow between two isothermal coaxial cylinders maintaining a constant gradient in the annular layer. The evolution of the temperature field along the tubes was determined by using the Galerkin method, as well as a finite-difference numerical model for various radius ratios. The heat transfer between the two tubes, characterized by the outer and inner Nusselt numbers, as well as the mixture temperature were calculated as functions of the reduced length of the tubes. The comparison of the solutions found with finite-difference method and the Galerkin technique for various trial functions revealed a good agreement.

## KONVEKTION ZWISCHEN ZWEI KOAXIALEN ZYLINDERN IM DAUERNDEN LAMINAREN STRÖMUNGSBEREICH

**Zusammenfassung** — Die Energiegleichung wurde im Falle einer laminaren Strömung zwischen zwei koaxialen isothermen Zylindern, welche einen konstanten Temperaturgradienten in der ringförmigen Schicht halten, aufgelöst. Die Änderung des Temperaturfelds längs der Röhren wurde mit Hilfe der Galerkinschen Methode sowie eines numerischen Modells mit endlichen Differenzen für verschiedene Radiusverhältnisse bestimmt. Die Wärmeübertragung zwischen den Röhren, die durch die äußere und innere Nusseltzahlen gekennzeichnet wird, sowie die Mischungstemperatur wurden in Abhängigkeit von der reduzierten Röhrenlänge berechnet. Der Vergleich der mit Hilfe der endlichen Differenzen und der Galerkinschen Methode für verschiedene Probefunktionen erhaltenen Lösungen lässt eine gute Übereinstimmung erkennen.

## ЛАМИНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

**Аннотация** — Решено уравнение сохранения энергии для случая ламинарного течения между двумя изотермическими коаксиальными цилиндрами при постоянном градиенте температуры в кольцевом слое. Развитие температурного поля вдоль труб определялось с помощью метода Галеркина и конечно-разностного численного метода для различных отношений радиусов. Теплообмен между двумя трубами, определяемый числами Нуссельта для внешнего и внутреннего цилиндров, а также температура смеси были рассчитаны в зависимости от приведенной длины труб. Сравнение решений, найденных конечно-разностным методом и методом Галеркина для различных пробных функций, обнаруживает хорошее соответствие.